全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品一线

二轮专题复习

广东专版



主编 肖德好

吉林教育出版社

全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品一线

本册主编

谢业建

编　　者

谢业建　邓永生　庞志全　晏　韬

特约主审

赵　博　李姗姗

主编　肖德好

高中数学听课手册

吉林教育出版社

CONTENTS 目录

01 高考专题讲练

• **思想篇** 数学思想方法 …… 001

• **方法篇** 解决数学问题的常用方法 …… 005

高考六大模块题型解法攻略

模块一 函数、导数与不等式

微专题 1 函数的图象与性质的应用 …… 009

微专题 2 不等式 …… 012

微专题 3 利用导数研究函数性质 …… 013

微专题 4 函数零点 …… 014

微专题 5 不等式恒（能）成立问题 …… 016

高分提能一 与零点、极值点有关的证明 …… 019

类型一 单一变量　　类型二 零点、极值点双变量的证明

类型三 零点与极值点综合

高分提能二 含 $\ln x$，e^x 的求参或证明问题 …… 022

方法一 零点设而不求　　方法二 换元构造函数

方法三 分离指对函数　　方法四 借助指对放缩

高分提能三 导数与三角函数结合问题 …… 025

类型一 与三角函数零点有关问题　　类型二 三角函数的最值与放缩

高分提能四 函数、导数有关的创新探索问题 …… 028

类型一 与函数、导数有关的交汇问题

类型二 与函数有关的创新探索问题

类型三 与导数有关的创新探索问题

• 教材回归 …… 031

• 必记知识清单　　• 回归教材本源

模块二 三角函数、平面向量与解三角形

微专题 6 三角函数的图象与性质、三角恒等变换 …… 033

微专题 7　平面向量的应用 …… 035
微专题 8　解三角形 …… 036
微专题 9　多三角形问题 …… 039
• 教材回归 …… 041
• 必记知识清单　• 回归教材本源

模块三　数列

微专题 10　等差数列、等比数列 …… 044
微专题 11　数列递推与数列求和 …… 046
微专题 12　数列与其他知识的交汇问题 …… 049
• 教材回归 …… 051
• 必记知识清单　• 回归教材本源

模块四　立体几何

微专题 13　空间几何体 …… 054
微专题 14　空间几何体的切接问题 …… 055
微专题 15　空间角与空间距离问题 …… 057
微专题 16　立体几何中的动态问题 …… 061
高分提能五　立体几何有关的创新交汇问题 …… 062
类型一　多几何体融合　类型二　立体几何与解析几何交汇
类型三　立体几何有关的创新问题
• 教材回归 …… 065
• 必记知识清单　• 回归教材本源

模块五　解析几何

微专题 17　直线与圆 …… 067
微专题 18　圆锥曲线的定义与性质 …… 069
微专题 19　圆锥曲线热点问题（一）必考题型 …… 071
微专题 20　圆锥曲线热点问题（二）多曲线问题 …… 076
高分提能六　圆锥曲线中非对称韦达定理的解题技巧 …… 079
高分提能七　圆锥曲线有关的创新探索问题 …… 080
类型一　圆锥曲线的探索问题　类型二　圆锥曲线有关交汇问题
类型三　圆锥曲线有关创新问题
• 教材回归 …… 083
• 必记知识清单　• 回归教材本源

模块六　统计与概率

微专题 21　计数原理 …… 087

微专题 22　统计与成对数据的统计分析 …… 088

微专题 23　概率 …… 092

微专题 24　随机变量及其分布 …… 094

高分提能八　概率与数列交汇问题 …… 098

类型一　传球模型　　类型二　摸球模型

类型三　游走模型

高分提能九　统计概率中的创新问题 …… 100

类型一　与函数相关的概率问题　　类型二　新定义问题

类型三　概率应用与逻辑推理　　类型四　期望、方差的性质应用

• 教材回归 …… 103

• 必记知识清单　　• 回归教材本源

作业手册（另附分册） / 107

参考答案（另附分册） / 178

02 特色专项（另附分册）

■ 考卷Ⅰ　小题·标准练

“8+3+3”73分练（小题1~小题12）

■ 考卷Ⅱ　解答·标准练

“15~17题”43分练（解答1~解答12）

“18题、19题”34分练（解答13~解答18）

思想篇 数学思想方法

思想一 函数与方程思想

函数的思想，是用运动和变化的观点分析和研究数学中的数量关系，是对函数概念的本质认识，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决. 如求数列中的项或最值、求解三角形最值(范围)问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程的思想，就是分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，通过解方程或方程组，或者运用方程的性质去分析问题、转化问题和解决问题. 如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

真题示例

1. [2025·全国一卷] 若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项的和等于 4，前 8 项的和等于 68，则这个数列的公比等于_____.

[解法关键]

方法一：利用等比数列的前 n 项和公式列出方程组，两式作商即可得解；方法二：利用等比数列前 n 项和的性质得到关于 q 的方程，解之即可得解. 答案为 2.

2. [2026·全国Ⅱ卷] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{2}$

[解法关键]

方法一：由已知两个与模有关的式子平方，两式相减可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$；方法二：由极化恒等式得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$. 答案为 D.

3. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上，若该球的体积为 36π，且 $3\leqslant l\leqslant 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是 (　　)

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$

C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

[解法关键]

画出图形，由题意可求出球的半径 $R=3$，设正四棱锥的底面边长为 a，高为 h，由射影定理可得到 l 与 h 的关系，由 l 的取值范围求出 h 的取值范围，又因为 $a^2=12h-2h^2$，所以正四棱锥的体积 $V(h)=-\frac{2}{3}h^3+4h^2$，利用导数即可求出 $V(h)$ 的取值范围. 答案为 C.

自测题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB=\sqrt{5}$，$AB=4$，点 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最小值为 (　　)

A. 0　　B. $-\frac{16}{25}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{16}{5}$

2. [2026·潍坊三模] 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线的右支上，且 $PF_1\perp PF_2$，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 a，则双曲线的离心率为_____.

3. 已知在 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中，第 3 项与第 5 项的二项式系数相等，则 x^2 的系数为_____.

4. [2026·重庆七校联盟模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，$a_1=1$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_n}(n\geqslant 2)$，则 $\frac{b_n+13}{n}$ 的最小值为_____.

思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离问题等.

真题示例

1. [2025·全国一卷] 已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围为　　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

[解法关键]

先求出圆心 $C(0,-2)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离，然后结合图形，根据半径的变化可以找到到直线的距离为 1 的点有且仅有 2 个的圆的临界位置，即可得出结论.答案为 B.

2. [2024·新课标Ⅰ卷] 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为　　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 8

[解法关键]

画出函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，由图可得答案.答案为 C.

3. [2026·北京卷] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}=(2,0)$，则 $|\boldsymbol{b}|$ 的最大值为　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[解法关键]

方法一：根据向量三角不等式，得到当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 反向时 $|\boldsymbol{b}|$ 取得最大值 4；方法二(几何轨迹)：将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点移动到原点 O，根据 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{b}|$ 的几何意义，可得 $|\boldsymbol{b}|_{\max}=4$.答案为 D.

自测题

1. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是　　(　　)

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\cup[1,3]$

2. [2026·山东威海二模] 已知抛物线 C 的顶点为原点，P 为 C 的准线 $x=-2$ 上一点，F 为 C 的焦点，线段 PF 交 C 于点 Q，若 $|PQ|=3|QF|$，则 $|PF|=$_____.

3. [2026·北京西城区二模] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3})$，单位向量 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=1$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}$ 的一个取值为_____.

4. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AC=AD=4$，$\angle CAD=60^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，若 $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 的面积的 2 倍，则 BD 的长度为_____.

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略．其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起．使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，分类标准统一，要做到不重不漏；三是明确分类讨论的步骤．

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)由图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论．

真题示例

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为 (　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

[解法关键]

方法一：由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，分类讨论 $-a$ 与 $-b$，$1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b=a+1$，代入可得最值；方法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，通过分类讨论进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b=a+1$，代入可得最值．答案为 C．

2. [2024·全国甲卷] 有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中无放回地随机取 3 次，每次取 1 个球．设 m 为前两次取出的球上数字的平均值，n 为取出的三个球上数字的平均值，则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____．

[解法关键]

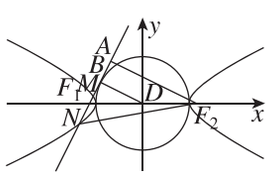
根据排列可求样本点的总数，设前两个球的号码为 a，b，第三个球的号码为 c，则 $a+b-3\leqslant 2c\leqslant a+b+3$，根据 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件发生的概率．答案为 $\frac{7}{15}$．

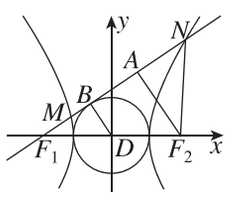
3. (多选题)[2022·全国乙卷] 双曲线 C 的两个焦点为 F_1，F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M，N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则 C 的离心率为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

[解法关键]

依题意不妨设双曲线的焦点在 x 轴上，设切点为 B，作 $F_2A\perp MA$，垂足为 A，利用正弦定理结合三角变换、双曲线的定义得到 $2b=3a$ 或 $a=2b$，即可得解，注意就 M，N 在双支上还是在单支上分类讨论，如图所示．答案为 AC．





自测题

1. (多选题) 若 $m\in\mathbf{R}$，则方程 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}+m\right|$ 表示的图形可能为 (　　)

A. 椭圆　　B. 双曲线

C. 抛物线　　D. 直线

2. 将 5 名学生分配到 3 个社区当志愿者，每个社区至少分配 1 名学生，每名学生只去 1 个社区，则不同的分配方法种数是 (　　)

A. 24　　B. 50　　C. 72　　D. 150

3. [2026·宁波二模] 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=(-1)^{n-1}a_{n-1}+a_{n-2}(n>2)$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 (　　)

A. $a_{2026}=1$　　B. $a_{2026}=2026$

C. $S_{2026}=1$　　D. $S_{2026}=2026$

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在解决数学问题时，采用某种手段将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题，将较难的问题化归为较简单的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题，简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

真题示例

1. [2026·全国Ⅰ卷] 曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点$(1,5)$处的切线方程为　　(　　)

A. $y=3x+2$　　B. $y=5x$

C. $y=8x-3$　　D. $y=13x-8$

[解法关键]

方法一：直接利用导数的几何意义求切线方程；方法二：利用对数的切线不等式转化为 $y=5x+8\ln x\leqslant 5x+8(x-1)=13x-8$，当 $x=1$ 时，$y=5x+8\ln x=13x-8$. 答案为 D.

2. [2023·全国乙卷] 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则 $x-y$ 的最大值是　　(　　)

A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. 4

C. $1+3\sqrt{2}$　　D. 7

[解法关键]

本题的转化与化归方向有三种：一是设 $x-y=k$，则 $x=k+y$，代入原方程化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$，即转化为此方程有解的问题，利用判别式求解即可；二是令 $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta+1$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$，用参数 θ 表示 x,y，则 $x-y=3\cos\theta-3\sin\theta+1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$，这样 $x-y$ 的最大值问题就转化为与参数 θ 有关的三角函数的最值问题；三是设 $x-y=k$，把此方程看成直线方程，利用圆心到直线的距离公式求最值. 答案为 C.

自测题

1. 已知复数 z 满足 $|z|\leqslant 1$，则复数 z 在复平面内对应的点 Z 的集合所形成图形的面积为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π

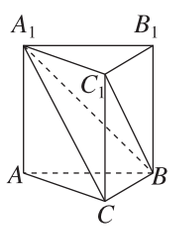
C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

2. 已知曲线 $y=e^{x-1}$ 与曲线 $y=a\ln x+a(a>0)$ 只有一个公共点，则 $a=$　　(　　)

A. $\frac{1}{e}$　　B. 1

C. e　　D. e^2

3. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=1$，则三棱锥 $C\text{-}A_1BC_1$ 的体积为_____.



4. 已知实数 a,b 满足 $a+b=2$，则 $\frac{a+2b-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的最大值为_____.

方法篇 解决数学问题的常用方法

方法一 特例法

在解决选择题和填空题时，可以取一个（或一些）特殊数值（或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等）来确定其结果，这种方法称为特例法. 特例法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、繁琐演算的过程，加快了解题的速度. 特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

真题示例

1. [2025·全国一卷] 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能是 （ ）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

[解法关键]

设 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=m$，对 m 讨论赋值，如 $m=2,5,8$，求出 x,y,z，即可得出大小关系，利用排除法求出. 答案为 B.

2. [2024·全国甲卷] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=1$，则 $a_3+a_7=$ （ ）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

不妨取等差数列的公差 $d=0$，则 $S_9=1=9a_1$，可得 $a_1=\frac{1}{9}$，则 $a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$. 答案为 D.

3. [2026·全国Ⅱ卷] 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，$f(x)+f(x-2)=0$，且当 $x\in\left[\frac{3}{2},3\right]$ 时，$f(x)=x^2+ax+b$，则 （ ）

A. $a=-2,b=-3$

B. $a=-2,b=3$

C. $a=-4,b=-3$

D. $a=-4,b=3$

[解法关键]

根据题目所给条件得到函数 $f(x)$ 的周期为 4，且图象关于直线 $x=2$ 对称，利用 $f(-1)=f(1)=f(3)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$ 直接列出方程组，解方程组可得 $a=-4,b=3$. 答案为 D.

自测题

1. 已知双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$，F_1,F_2 为 C 的两个焦点，过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，O 为坐标原点，则 $\frac{|PF_1|}{|OP|}=$（ ）

A. $\sqrt{6}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. 已知空间中四个不同的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\alpha_1\perp\alpha_2,\alpha_2\perp\alpha_3,\alpha_3\perp\alpha_4$，则下面结论一定正确的是 （ ）

A. $\alpha_1\perp\alpha_4$

B. $\alpha_1/\!/\alpha_4$

C. α_1 与 α_4 既不垂直也不平行

D. α_1 与 α_4 的位置关系不确定

3. （多选题）已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，满足 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，且 $f(1)=1$，则下列说法中正确的是 （ ）

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 6 为 $f(x)$ 的一个周期

D. 点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心

方法二　验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件，然后选择符合题目条件的选项的一种方法．在运用验证法解题时，若能根据题意确定代入顺序，则能加快解题速度．

(1)使用前提：各选项可分别作为条件．

(2)使用技巧：可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获得答案．

(3)常见问题：题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算繁琐的问题等．

真题示例

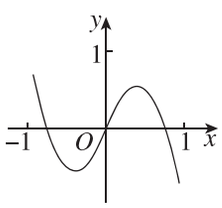
1. [2025·全国一卷] 已知点$(a,0)(a>0)$是函数$y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$图象的一个对称中心，则$a$的最小值为　(　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

[解法关键]

将每个选项代入验证函数值是否为0或者不存在，将A,C的值代入函数值不为0，将B,D的值代入函数值为零，选最小的即为B．答案为B．

2. [2026·天津卷] 函数$f(x)$的部分图象如图所示，则$f(x)$的解析式可能为　(　)



A. $x+\sin\pi x$　　B. $x-\sin\pi x$

C. $-x+\sin\pi x$　　D. $x\cdot\sin\pi x$

[解法关键]

先由函数奇偶性排除D，再由$x=1$时验证函数值的正负情况可得解．答案为C．

3. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数$f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$(a为常数)，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$　(　)

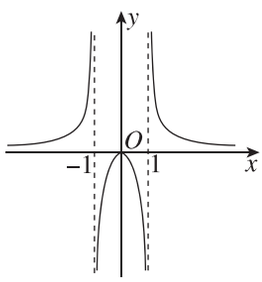
A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

[解法关键]

令$h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in(-1,1)$，原问题等价转化为$h(x)$有且仅有一个零点，可知$h(x)$为偶函数，根据偶函数图象的对称性可知$h(x)$的零点只能为0，可得$a=2$，并代入检验即可．答案为D．

自测题

1. [2025·天津卷] 已知函数$y=f(x)$的图象如图，则$f(x)$的解析式可能为　(　)



A. $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$

B. $f(x)=\frac{x}{|x|-1}$

C. $f(x)=\frac{|x|}{1-x^2}$

D. $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$

2. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=\frac{2}{3}$，且$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}(n\geqslant 2)$，则$a_n$等于　(　)

A. $\frac{2}{n+1}$　　B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

C. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　D. $\frac{2}{n+2}$

3. 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增且存在零点，则$\omega$的取值范围是　(　)

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]\cup[5,6]$

B. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left[5,\frac{16}{3}\right]$

D. $[5,6]$

方法三　构造法

构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想，是指根据题设条件和结论的特征、性质，运用已知数学关系式和理论，构造出满足条件或结论的数学对象，从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来，并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法. 构造法应用的技巧是“定目标构造”，需从已知条件入手，紧扣要解决的问题，把陌生的问题转化为熟悉的问题. 解题时常构造函数、方程、几何图形等.

(1)使用前提：所构造的函数、方程、几何图形等要合理，不能超出原题的限制条件.

(2)使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

(3)常见问题：比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

真题示例

1. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

[解法关键]

构造函数 $f(x)=(1-x)e^x(0<x<1)$，$g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x\leqslant 0.1)$，利用函数的单调性可得结果. 答案为 C.

2. (多选题)[2026·全国Ⅰ卷] 在空间中，A，B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1，若二面角 C-AB-D 为 60°，则 (　　)

A. $\angle CAD\geqslant 60°$

B. $CD\geqslant\sqrt{3}$

C. 当 $AB\perp CD$ 时，$CD\perp$ 平面 ABD

D. 当 $AB\perp$ 平面 ACD 时，$AC\perp AD$

[解法关键]

利用题目所给条件，构造动点 C，D 的运动轨迹组成的几何体，分别是以直线 AB 为母线，底面半径分别为 2，1 的圆柱，在圆柱中结合线面位置关系解题. 答案为 BC.

3. [2024·全国甲卷] 曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为_____.

[解法关键]

令 $x^3-3x=-(x-1)^2+a$，分离参数 a，构造新函数 $g(x)=x^3+x^2-5x+1(x>0)$，结合导数求得 $g(x)$ 的单调区间，画出 $g(x)$ 的大致图象，数形结合即可求解. 答案为 $(-2,1)$.

自测题

1. 在正三棱锥 S-ABC 中，棱 SA，SB，SC 两两垂直，若 $AB=2\sqrt{5}$，则该正三棱锥的外接球的表面积为 (　　)

A. $5\sqrt{30}\pi$　　B. 60π

C. $20\sqrt{15}\pi$　　D. 30π

2. [2026·湘潭三模] 已知 $a=\ln 2$，$b=e^{-0.2}$，$c=\frac{2}{e}$，则 (　　)

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $a>b>c$

3. 直线 $\sqrt{2}ax+by-1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，且 $\triangle AOB$ 是直角三角形，其中 a，b 为实数，O 是坐标原点，则 $P(a,b)$ 与 $G(0,1)$ 之间距离的最大值为 (　　)

A. 3　　B. $\sqrt{2}+1$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

4. [2026·辽宁抚顺一模] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $2a_n=S_n+1$，则 $S_n=$_____.

方法四　逆向思维

在解数学题时，面对某些数学问题，当从正面思考难以顺利解决时就转向反面思考，即逆向思维，这便是“正难则反”的解题策略. 如反证法、排除法、变换主元法、逆推法、构造反例等都是“正难则反”“逆向思维”的体现. 反证法是逆向思维的方法之一，它是一种最常见的证明方法，成语“自相矛盾”中“以子之矛攻子之盾”正是采用了反证法.

(1)使用前提：正向思维进行思考时无法找到解决问题的有效方法或者正向思考分类讨论类别复杂时，可以使用逆向思维.

(2)使用技巧：反向提问，将问题的条件和结论互换，或者考虑相反情况.

(3)常见问题：概率计算中“至少一个发生”“至多一个不发生”等复杂表述，排列组合中对于一些正面计算复杂的情况、立体几何证明、命题真假的判断、唯一性的证明等问题.

真题示例

1. [2024·上海卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，定义集合 $M=\{x_0 \mid x_0\in\mathbf{R}, x\in(-\infty, x_0), f(x)<f(x_0)\}$，在使得 $M=[-1,1]$ 的所有 $f(x)$ 中，下列成立的是 (　　)

A. 存在 $f(x)$ 是偶函数

B. 存在 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取最大值

C. 存在 $f(x)$ 是严格增函数

D. 存在 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值

[解法关键]

对于 A,C,D，利用反证法并结合函数奇偶性、单调性以及极小值的概念即可判断；对于 B，构造函数 $f(x)=\begin{cases}-2, x<-1,\\ x, -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, x>1\end{cases}$，即可判断. 答案为 B.

2. [2022·北京卷] 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$. 给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3；

②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$ 为递减数列；

④$\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是_____.

[解法关键]

推导出 $a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，求出 a_1, a_2 的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③. 答案为①③④.

自测题

1. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2>0$；命题 q：$\exists x>0, \ln x<0$. 则 (　　)

A. p 和 q 都是真命题

B. p 是假命题，q 是真命题

C. p 是真命题，q 是假命题

D. p 和 q 都是假命题

2. 小王数学期末考试考了 90 分，受到爸爸表扬的概率为 $\frac{1}{2}$，受到妈妈表扬的概率也为 $\frac{1}{2}$，假设小王受到爸爸表扬和受到妈妈表扬相互独立，则小王被表扬的概率为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

3. 有甲、乙、丙、丁 4 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，乙和丙不相邻，则不同的排列方式共有 (　　)

A. 12 种　　B. 8 种

C. 6 种　　D. 4 种

模块一　函数、导数与不等式

微专题 1　函数的图象与性质的应用

考法探析 · 明规律

微点 1　函数性质的应用

角度 1　函数的奇偶性与单调性

例 1　(1)(多选题)[2026 · 河北邯郸二模] 已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-a}{2^x+1}$ 为奇函数,则下列结论正确的是　(　)

A. $a=1$

B. $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

C. $f(x)$的值域为$(-1,1)$

D. $f(x+1)+f(x-3)>0$ 的解集为$\{x\mid x>1\}$

(2)[2026 · 浙江 Z20 联盟三模] 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,若函数 $y=f(x)-g(x)$的值域为$[-4,2]$,则函数 $y=2f(3x)+2g(3x)$的最大值为　(　)

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

[听课笔记]

自测题

1. [2026 · 福建厦门二模] 设函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$,记 $a=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,$b=f\left(\log_2\dfrac{3}{2}\right)$,$c=f(2^{0.1})$,则　(　)

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

2. (多选题)[2025 · 全国二卷] 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=(x^2-3)e^x+2$,则　(　)

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时,$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$,当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$的极大值点

角度 2　函数的对称性与周期性

例 2　(1)[2026 · 全国Ⅱ卷] 已知 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,$f(x)+f(x-2)=0$,且当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ 时,$f(x)=x^2+ax+b$,则　(　)

A. $a=-2,b=-3$　　B. $a=-2,b=3$

C. $a=-4,b=-3$　　D. $a=-4,b=3$

(2)[2026 · 四川成都雅礼中学月考] 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(x)$的图象关于点$(1,2)$对称,$g(x)=f(x-2)+3x$,且 $g(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,则 $g(19)=$_____.

[听课笔记]

自测题

1. [2026 · 河北衡水二模] 已知偶函数 $f(x)$满足 $f(1+x)=f(1-x)$,当 $x\in(0,1)$时,$f(x)=2^x-1$,则 $f(\log_2 6)=$　(　)

A. $\dfrac{5}{4}$　　B. $\dfrac{5}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{7}{16}$

2. [2021 · 新高考全国Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x+2)$是偶函数,$f(2x+1)$是奇函数,则　(　)

A. $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

【规律提炼】

1. 奇偶性的本质是函数图象具有相应的对称性.奇函数的图象关于原点对称,关于原点对称的区间(在定义域内)上函数的单调性不变;偶函数的图象关于 y 轴对称,关于原点对称的区间(在定义域内)上函数的单调性相反.

2. 函数的“四性”之间的关系可类比三角函数的对称性和周期的关系,利用数形结合的思想求解.

微点 2　基本初等函数

例 3 (1)[2025 · 全国一卷] 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$,则 x,y,z 的大小关系不可能是 (　　)

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

(2)[2026 · 贵州安顺一模] 设方程 $\ln(e^{2x}+1)-x=\ln 3$ 的两个根为 x_1,x_2,则 $x_1^3+x_2^3=$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. e　　D. π

[听课笔记]

【规律提炼】

掌握基本初等函数的图象和性质,常用数形结合思想处理与基本初等函数有关的函数零点(或方程的根)问题,利用其单调性等性质解有关不等式问题.

自测题

1. [2026 · 河南开封模拟] 高斯是德国著名的数学家,用其名字命名的“高斯函数”为:设 $x\in\mathbf{R}$,用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则称 $y=[x]$ 为高斯函数.例如:$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$,$\left[\frac{3}{2}\right]=1$.已知函数 $f(x)=4^{x-\frac{1}{2}}-3\times 2^x+4$ $(0<x<2)$,则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为 (　　)

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $[-1,2)$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $[-1,2]$

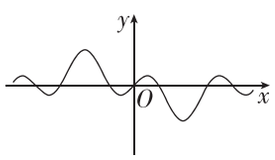
2. (多选题)若方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+x=2$ 的根分别为 x_1,x_2,则 (　　)

A. $x_1+x_2=2$　　B. $x_2-x_1>1$

C. $\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$　　D. $x_1e^{x_1}=x_2\ln x_2$

微点 3　函数图象与函数解析式

例 4 (1)[2026 · 北京东城区二模] 已知函数 $y=F(x)$ 的部分图象如图所示,若 $F(x)=f(x)g(x)$,则 $f(x),g(x)$ 可以为 (　　)



A. $f(x)=\sin 2x,g(x)=\sin x$

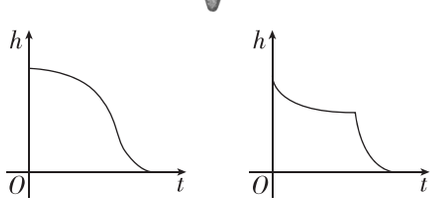
B. $f(x)=\sin 2x,g(x)=\cos x$

C. $f(x)=\cos 2x,g(x)=\sin x$

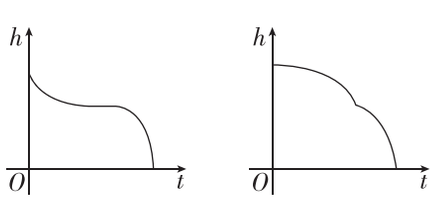
D. $f(x)=\cos 2x,g(x)=\cos x$

(2)[2026 · 山东泰安二模] 2002 年山西陶寺遗址的考古发掘中,出土了 5 件漆木漏斗形器,被确认为沙漏计时器,经 3D 打印复原实验,每件沙漏装满细沙后自动匀速下漏,全部漏完用时 14.4 分钟,100 件漏完恰好为 24 小时.如图,该漏斗形器上部为圆台,下部为圆锥,则装满细沙的漏斗形器中剩余细沙的高度 h 与时间 t 的函数图象可能为 (　　)





A　　B



C　　D

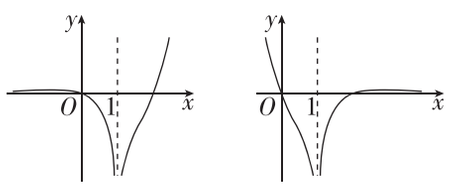
［听课笔记］

【规律提炼】

函数图象与函数解析式都是函数的表达方式，解决这种类型的问题要从定义域、值域、单调性、奇偶性等性质突破，同时也可以通过判断函数图象是否过定点或特殊函数值的正负进行求解.

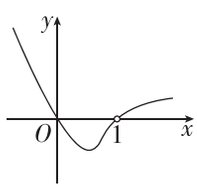
自测题

1. ［2026·河北廊坊一模］函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{e^x}$ 的大致图象是（　　）

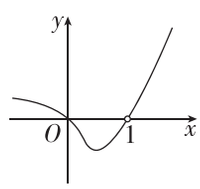


A

B



C



D

2. （多选题）［2026·湖北武汉调考］已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x\leqslant 2,\\ 2-\ln(x-1),x>2,\end{cases}$ 则（　　）

A. $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $1<x<2$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(2x)$

D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(x)>f(4-x)$

微点4　抽象函数的性质

例5　（1）［2026·江西九江模拟］已知函数 $f(x)$ 满足对任意实数 x,y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-2$，且 $f(1)=3$，则 $f(2026)=$（　　）

A. 2026^2+2　　B. 2026^2+1

C. 2026^2　　D. 2026^2-1

（2）（多选题）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f[f(x+y)]=f(x)+f(y)$，$f(1)=1$，则（　　）

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称

D. $f(2027)=2026$

［听课笔记］

【规律提炼】

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式，只给出它的一些特征、性质或一些特殊关系式的函数，常见的解题思路是赋值、利用已知函数模型、形成递推等.

自测题

1. 已知函数 $f(x)$ 具有下列性质：

①当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 时，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$；

②在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)$ 单调递增；

③$f(x)$ 是偶函数.

则 $f(0)=$_____，函数 $f(x)$ 的一个可能解析式为 $f(x)=$_____.

2. （多选题）［2026·浙江宁波二模］定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，$f(x+y)=f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)$，则（　　）

A. $f(0)=0$

B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $f(1-x)=f(1+x)$

D. $f(x+2)=f(x)$

微专题 2　不等式

考法探析 · 明规律

微点 1　不等式的性质及应用

例 1（多选题）已知实数 a,b 满足 $\sqrt{a-1}>\sqrt{b-1}$，则（　　）

A. $a>b$

B. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

C. $(a-b)(a+b-2)<0$

D. $2^a-2^b>3^{-a}-3^{-b}$

［听课笔记］

【规律提炼】

比较两式的大小常用不等式的性质，或者作差比较与 0 的大小，或者作商（两式常为正数）比较与 1 的大小，或者举反例.

自测题

1. （多选题）已知实数 a,b 满足 $a>|b+1|$，则下列结论正确的是（　　）

   A. $2^a>2^{b+1}$　　B. $a^2>4b$

   C. $a^2>b^2+1$　　D. $a^2>b|b+1|$

2. 设 a,b 都是正数，且 $a\neq b$，则 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小关系是_____.

微点 2　基本不等式

例 2（1）（多选题）［2022 · 新高考全国Ⅱ卷］若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A. $x+y<1$　　B. $x+y\geqslant -2$

C. $x^2+y^2\geqslant 1$　　D. $x^2+y^2\leqslant 2$

（2）［2026 · 宁波镇海中学最后一卷］已知实数 a,b 满足 $ab+5=3a+2b$，且 $a>2$，则 $a+b$ 的最小值为_____.

［听课笔记］

【规律提炼】

1. 运用基本不等式求最值时，注意其是否符合结构特征和使用条件. 有时候需要进行适当的转化才能使用基本不等式，要有整体的结构意识.

2. 在运用基本不等式求最值时，若需要运用两次或两次以上，则要注意等号的取得条件是否矛盾.

自测题

1. ［2026 · 福建南平二模］若 $a>0,b>0$，且 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，则 $\dfrac{2a}{b}+b$ 的最小值为_____.

2. ［2026 · 广西南宁二模］设 $a>0,b>0$，若不等式 $a(a+1)^2+b(b+1)^2\geqslant \lambda ab$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为_____.

3. 若 $x+y=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}$，则 $x+y$ 的最大值为_____.

微点 3　其他知识与不等式交汇问题

例 3［2026 · 全国Ⅱ卷］若函数 $f(x)=2^x+2^{2-x}-m$ 有两个零点，则 m 的取值范围是_____.

［听课笔记］

【规律提炼】

基本不等式经常与其他知识综合，如解析几何、三角函数、数列、立体几何、函数与导数、向量等，主要用来求最值或范围，注意基本不等式使用的条件.

自测题

1. ［2021 · 新高考全国Ⅰ卷］已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为（　　）

   A. 13　　B. 12

   C. 9　　D. 6

2. ［2026 · 江西南昌模拟］已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_3=b_3=2$，则（　　）

   A. $b_2b_4\leqslant a_2a_4$　　B. $b_2b_4\geqslant a_2a_4$

   C. $a_2+a_4\leqslant b_2+b_4$　　D. $a_2+a_4\geqslant b_2+b_4$

微专题 3　利用导数研究函数性质

考法探析 · 明规律

微点 1　切线问题

例 1　(1)[2024 · 全国甲卷] 设函数 $f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 (　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

(2)若直线 $y=kx+1$(k 为常数)是曲线 $y=\ln x+1$ 和曲线 $y=ae^x+1$ 的公切线,则实数 a 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{e^2}$

C. 1　　D. e

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 曲线的切线问题,要注意区分“在某点的切线”还是“过某点的切线”.

2. 两条曲线的公切线问题,一般的处理方法是设出两个切点,分别写出切线方程,利用切线重合(方程是一样的),列方程组求解,对运算要求较高.

自测题

1. [2022 · 新高考全国Ⅰ卷] 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线,则 a 的取值范围是_____.

2. [2026 · 河南焦作一模] 已知曲线 $y=\ln x+2$ 与 $y=\ln(x+1)$ 的公切线为 l,则 l 在 y 轴上的截距为_____.

微点 2　单调性

例 2　(1)[2026 · 广东广州二模] 已知函数 $f(x)=xe^{kx}$ 在区间 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增,则 k 的取值范围为_____.

(2)[2026 · 济南二模] 已知正实数 a,b,c 满足 $ae^a=b\ln b=c^2$,则 (　　)

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$

C. $b<a<c$　　D. $a<b<c$

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增,则 $\forall x\in D$,$f'(x)\geqslant 0$;若函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减,则 $\forall x\in D$,$f'(x)\leqslant 0$.

2. 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调递增区间,则 $\exists x\in D$,$f'(x)>0$;若函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调递减区间,则 $\exists x\in D$,$f'(x)<0$.

自测题

1. (多选题)[2024 · 新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$,则 (　　)

A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. 当 $0<x<1$ 时,$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $1<x<2$ 时,$-4<f(2x-1)<0$

D. 当 $-1<x<0$ 时,$f(2-x)>f(x)$

2. [2026 · 山东青岛二中模拟] 已知 $a=\ln\frac{2026}{2025}$,$b=\frac{1}{2025}$,$c=\ln\frac{2025}{2026}$,则 (　　)

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$

C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

微点 3　极值与最值

例 3　(1)(多选题)[2023 · 新课标Ⅱ卷] 若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值,则 (　　)

A. $bc>0$　　B. $ab>0$

C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

(2)[2026·全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1,则 $a=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

[听课笔记]

例 4 已知函数 $f(x)=a(x-1)e^x-\ln x$,其中 $a>0$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线经过点 $(2,2)$,求 a 的值;

(2)证明:函数 $f(x)$ 存在极小值;

(3)记函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$,求 $g(a)$ 的最大值.

【规律提炼】

1. 若函数 $f(x)$ 在定义域内可导,则"$f'(x_0)=0$"是"x_0 为极值点"的必要不充分条件.

2. 已知含参函数的极值点个数,求参数范围时,常用分离参数法转化为直线与曲线的交点个数问题.

3. 函数在开区间内存在最值,则在区间内存在极值点.

4. 求含参函数在开区间内的最值时,常讨论极值点与区间端点的关系及极值与区间端点函数值的大小关系.

自测题

1. (多选题)[2026·河北 NT20 质检] 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c(a\neq0)$,则下列说法正确的是 (　　)

   A. 若 $a=b=1$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

   B. $f(x)$ 的图象为中心对称图形

   C. 若 $b=-3a=1,c=0$,则 $f(x)$ 在 (m^2-10,m) 上有最小值的充要条件为 $-1<m<3$

   D. 若 $b=-3,c=1,a>1$,则 $\forall x\in[-1,1]$,$f(x)\geqslant0$ 的充要条件为 $a\leqslant4$

2. [2026·江苏南京二模] 已知函数 $f(x)=x^3+3\sqrt{3}x^2+mx(m\in\mathbf{R})$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $|f(x_1)-x_1|=|f(x_2)-x_2|$,则 $m=$ _____.

微专题 4　函数零点

考法探析·明规律

微点 1　参变分离解决零点问题

例 1 [2026·贵州遵义模拟] 若函数 $f(x)=\begin{cases}x+\ln x,x>0,\\x^2+2x-a,x\leqslant0\end{cases}$ 在定义域上恰有三个零点,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,0]$　　B. $(-1,0)$

C. $[-1,0)$　　D. $(-1,0]$

[听课笔记]

【规律提炼】

由 $f(x)=a-g(x)=0$ 变形为 $a=g(x)$,则函数 $f(x)=a-g(x)$ 的零点个数即为直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点个数.利用导数研究 $g(x)$ 的单调性、极值等,画出 $g(x)$ 的大致图象,数形结合求解.

自测题

1. [2026·北京西城区二模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x-1,0<x\leqslant 4,\\ x-6,x>4,\end{cases}$ 集合 $M=\{x\mid |f(x)|=m\}$，其中 $m\geqslant 0$. 若集合 M 中共有 3 个元素，则 m 的取值范围是_____；若集合 M 中共有 4 个元素，则这 4 个元素乘积的最小值为_____.

2. 已知 $f(x)=x\mathrm{e}^x$.

(1)求 $f(x)$的最小值；

(2)若方程 $f(x)=ax^2$ 有两个不等的实根，求 a 的取值范围.

【规律提炼】

分类讨论解决函数零点问题一般遵循：

1. 讨论最高次项的系数；
2. 讨论极值点是否存在；
3. 讨论满足 $f'(x_0)=0$ 的 x_0 是否在定义域内；
4. 结合端点趋势，依靠极值正负判定零点个数.

自测题

已知函数 $f(x)=(x-m)\mathrm{e}^x$ 在 $x=1$ 处有极小值.

(1)求实数 m 的值；

(2)已知函数 $g(x)=2f(x)-a(x-1)^2+5$，$0<a<\mathrm{e}$，讨论函数 $g(x)$的零点个数.

微点 2　分类讨论解决零点问题

例 2 [2026·广东广州三模] 已知函数 $f(x)=(ax+1)\ln x-2ax$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)若 $a>0$，求 $f'(x)$的极值；

(2)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，求 a 的取值范围；

(3)讨论 $f(x)$的零点个数.

微点 3　隐零点问题

例 3　已知函数 $f(x)=(x-a)\ln x+\dfrac{a}{2}$，其中 $a\geqslant 0$. 若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.